力学系の分岐点とKMS state(力学系理論の最近の発展)

AUTHOR(S):

梶原, 毅

数理解析研究所講究録
第 1552 巻 2007 年 79-96

力学系の分岐点と KMS state

岡山大学・環境学研究科　梶原 毅 (Tsuyoshi Kajiwara)
Graduate School of Environmental Sciences
Okayama University

1 序論

本研究は, 綿谷安男氏 (九州大学), 泉正己氏 (京都大学) との共同研究である.

力学系に対して C^*-環を作り, 作られた C^*-環を通してもとの力学系について調べる研究は古くから行われている. フォンノイマン環, C^*-環の両方の状況で, 接合積と呼ばれる構成があり, 力学系から作用素環に例を提供する観点からも重要であった. 接合積は空間の同形写像をあつかう際には都合が良いが, 非可逆な写像の場合には困難があった. Pimsner が Cuntz 環、Cuntz-Krieger 環, 非可逆力学系の場合の構成などを統一的に取り扱うための C^*-環の構成法を与え, この分野は飛躍的に進歩した. 著者達は以前より Pimsner 構成に関連した研究を行っており、近年有理関数によってリーマン球面上に与えられる力学系 ([7]), また自己相似写像から作られる力学系 ([8]) に対して, C^*-環を構成して研究を行っている.

一方, KMS state は古くは統計力学の平衡状態の記述として使われて来た. 近年, 力学系との関係で C^*-環の KMS state が研究されている ([12], [3], [13], [2],[4]). 力学系から作られる C^* 環上の KMS state は, 多くの場合もとの力学系のエルゴード的測度に対応していた. 特に, 力学系に特異点, 分岐点がない場合には, 多くの場合にはエルゴード性を反映して KMS state は一意的であった. 特に, Cuntz-Krieger 環の場合には, ペロン・フロベニウスの定理を反映していた ([3]).

本研究では, リーマン球面上の有理関数で与えられる力学系, また自己相似写像によって与えられる (準) 力学系を取り扱う. これらの力学系は一般に分岐点を持ち, 分岐点から新たな KMS state が現れる. 分岐点を持たない場合と比較すると, 分岐点においてエルゴード性が崩れているとも解釈できる. これらの分岐点をもつ非可逆な力学系に対して Cuntz-Pimsner 環を構成して KMS state の分類を行った ([6]). 有理関数力学系については完全分類を行うことができた. また, KMS state からもとの力学系の情報を復元することも行った. 自己相似写像の場合には, 対象が多様なこともあり, 完全ではない.

本稿の構成は次の通りである. 定義と基本性質を述べたのちに, Cuntz-Krieger 環, Cuntz 環の KMS state についての古典的な結果を Pimsner 環の立場で説明する. これらは, Perron-Furobenius 型作用素の名前の由来, および KMS state の分類方法につ

いての示唆を与えている．その後，主として有理関数力学系について Cuntz-Pimsner 環を構成して KMS satate の分類を行う．有理関数力学系の場合に Perron-Frobenius 型作用素を記述するため，具体的に可算基底の構成を行う．Lyubich 測度が典型的な KMS state を与えるとともに，分岐点が性格のことなる KMS state を与えることがわかる．なお，KMS state の情報から，被覆の次数，分岐点の数，例外点の型などが復元できる．さらに KMS state が生成するフォンノイマン環の型について述べる．最後に未解決の問題，また自己相似写像についての対応する結果と例について述べる．

2 準備

2.1 KMS state

A を C*-環とする．α が A の自己同型であるとは，α が A から A への一対一写像で全ての代数演算を保つことである．位相群 G から A の自己同型群への連続準同型を，G の A への作用という．

以下，単位元をもつ C*-環 A 上に一次元トーラス $\mathbf{T}$ の 作用 γ があたえられているとする．そのとき，m を整数として，

$$A^{(m)} = \{ a \in A \,|\, \gamma_t(a) = e^{imt}a \}$$

を A の m スペクトル部分空間という．$A^{(m)}$ 全体の直和 A^{alg} は，A の中で稠密になる．C*-環 A 上の正値線形汎関数でノルムが 1 のものを state という．β は 正の実数とする．

A の state φ が γ に関する β-KMS state であるとは，φ が γ-不変で，$x \in A$, $y \in A^{(n)}$ のとき，

$$\varphi(yx) = e^{-n\beta}\varphi(xy)$$

となることである．

なお，φ の γ-不変性により，$x \in A^{(m)}$, $y \in A^{(n)}$ で $m \neq n$ のときは，$\varphi(xy^*) = \varphi(y^*x) = 0$ となり、φ は $A^{(0)}$ のトレースを外では 0 として A へ拡大したものになっている．

なお，$\beta = 0$ のときには，β-KMS state は、A の γ 不変な tracial state (ノルム 1 の正値トレース) を意味する．

2.2 ヒルベルト双加群と CP 環

Pimsner によって与えられた，有理関数力学系，自己相似写像，接合積など非常に多くの具体例を含む C*-環構成の構成法を説明する．

A を 単位元を持つ C*-環, X を線形空間とする. $X\times X$ から A への写像 $(x|y)_A$ が A 値内積とは次が成り立つことである.

(1) $(x|y)_A$ は x について反線形, y について線形.

(2) $(x|y)_A=(y|x)_A^*$.

(3) $(x|x)_A\geq 0$, $(x|x)_A=0$ なら $x=0$.

X がヒルベルト A 加群とは, X に A 内積があり X は同時に A 右加群で, かつ次がなりたつことである.

(1) $(x|ya)_A=(x|y)_Aa$, $(xa|y)_A=a^*(x|y)_A$

(2) ノルム $\|x\|=\|(x|x)_A\|^{1/2}$ について X は完備.

(3) $\{(x|y)_A|x,y\in X\}$ で生成される A のイデアルは A と一致する.

なお, X が A 内積と右 A 作用をもってヒルベルト A-加群であるとき, X_A と表すことがある.

$L(X)$ で, X から X の線形写像 T で, $(Tx|y)_A=(x|Sy)_A$ となる S が存在するもの全体とする. A から $L(X)$ への単射準同型 ϕ で, $\phi(1)=1$ を満たすものが与えられているとき, X をヒルベルト A-A 双加群または, A-A correspondence という.

X をヒルベルト A 加群とするとき, X_A の可算基底とは, X の可算集合 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ で, 任意の $x\in X$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}\|x-\sum_{i=1}^{n}u_i(u_i|x)_A\|=0$$

となるものを言う. ヒルベルト空間の基底と似ているが, 直交性は要求しない.

$\{T_x|x\in X\}$ と A の元で

(1) $\alpha T_x+\beta T_y=T_{\alpha x+\beta y},\quad x,y\in Y$

(2) $T_xa=T_{xa},\quad aT_x=T_{\phi(a)x}\quad x\in X, a\in A$

(3) $T_x^*T_y=(x|y)_A$

の条件のもとで生成される普遍的な C*-環 を $\mathcal{T}_X$ と表し, これを Toeplitz 環 という.

Toeplitz 環は一般には力学系に対応する C*-環としては大きすぎ, 適宜割る必要がある. $\theta_{\xi,\eta}$ を

$$\theta_{\xi,\eta}z=\xi(\eta|z)_A$$

で与えられる1階作用素とする. $\theta_{\xi,\eta}\in L(X)$ である. $K(X)$ は, $\theta_{\xi,\eta}$ の有限和のノルム閉包とする. これは, ヒルベルト空間上のコンパクト作用素環の一般化である.

$K(X)$ から $\mathcal{T}_X$ への 写像 j_K を $j_K(\theta_{\xi,\eta})=T_\xi T_\eta^*$ が定義され, *-単射であることが示されている. $I_X=\phi^{-1}(A\cap K(X))$ とおく. I_X は A のイデアルである. Toeplitz 環を,

$$\{a-(j_k\circ\phi)(a)\,|\,(a\in I_X)\}$$

で生成されるイデアルで割った C*-環を X によって定義される Pimsner 環と呼び, $\mathcal{O}_X$ とかく.

X, A の元は $\mathcal{O}_X$ の中に単射的に埋め込まれるので, 像と同一視する. $x \in X, a \in A$ に対して,

$$\gamma_t(x) = e^{it}x, \qquad \gamma_t(a) = a$$

によって, $\mathcal{O}_X$ 上のトーラス $\mathbf{T}$ のゲージ作用 γ を定義する.

$\{x_1x_2\cdots x_my_n^*\cdots y_1^*\ x_i,\ y_j \in X,\ a \in A\}$ の形の元の線形結合が, $\mathcal{O}_X$ の中で稠密であり, それを代数的元という. また,

$$\mathcal{O}_X^{(m)} = \{\sum x_1x_2\cdots x_py_q^*\cdots y_1^*|x_i,\ y_j \in X,, p-q=m\}$$

がゲージ作用に関する m スペクトル部分空間である.

2.3 Pimsner 環の KMS state

X は有限生成とは限らないが可算生成とする. そのとき必ず X_A の可算基底 $\{u_i\}_{i=1,2,\ldots}$ が存在する. Perron-Frobenius 型作用素 $F: A^* \to A^*$ を,

$$F(\omega)(a) = \sum_{i=1}^{\infty}\omega((u_i|a\cdot u_i)_A), \qquad \omega \in A^*, \quad a \in A$$

で定義する. $\beta \geq 0$ に対して, $F_\beta = e^{-\beta}F$ とおく. なお, 以下すべてゲージ作用に関する KMS state を考えるので, これは省略する.

Proposition 1. *(Laca-Neshveyev [11]) $\mathcal{O}_X$ の β-KMS state と A の tracial state τ で次を満たすものが, アファイン同型である.*

$$(K1) \qquad F_\beta(\tau)(a) = \tau(a), \qquad \forall a \in I_X$$
$$(K2) \qquad F_\beta(\tau)(a) \leq \tau(a), \qquad \forall a \in A^+$$

対応は, $\mathcal{O}_X$ から A への制限によって与えられる. 逆に A から $\mathcal{O}_X$ に拡張する手続きもかける.

$\|F_\beta\| < 1$ とする. $\tau_0 = \tau_1 - F_\beta(\tau)$ とおく. (K1) より τ_0 は I_X で消えるので, A/I_X 上の tracial state とみなせる.

$$\psi_{\tau,\beta} = m_{\tau,\beta}\sum_{n=0}^{\infty}F_\beta{}^n(\tau)$$

とおく. 右辺は $\|F_\beta\| < 1$ より絶対収束する. $m_{\tau,\beta}$ は正規化定数である. $\psi_{\tau,\beta}$ は, A のトレースであり, (K1), (K2) をみたし, $\mathcal{O}_X$ の β-KMS state $\varphi_{\tau,\beta}$ に拡張できる.

Proposition 2. $\|F_\beta\| < 1$ のとき, $\tau \to \varphi_{\tau,\beta}$ は A/I_X の *tracial state* から $\mathcal{O}_X$ の β-*KMS state* への一対一対応である. この対応は, アファインではないが, 端点を端点に移す.

2.4 例

C*-環の KMS state の古典的な例を, Pimsner 環の立場で説明する. ここであげる例においては, ヒルベルト双加群は有限生成である.

2.4.1 Cuntz-Krieger 環

Enomoto-Fujii-Watatani ([3]) による Cuntz-Krieger 環の KMS state の分類の結果を, Pimsner 環の立場で説明する. なお, この章の計算は, Pinzari-Watatani Yonetani ([13]) による.

B は成分が 0 または 1 の n 次正方行列とし, 以下では特に B を既約行列とする. $S_1, S_2, \cdots, S_n$ を部分等距離作用素で,

$$S_i^* S_j = 0 \quad (i \neq j), \qquad S_i^* S_i = \sum_{j=1}^{n} B(i,j) S_j S_j^*.$$

をみたすものとする. この式を, Cuntz-Krieger 関係式という.

Definition 3. $\{S_1, \ldots, S_n\}$ で生成される C*-環を行列 B によって決まる Cuntz-Krieger 環と言い, $\mathcal{O}_B$ と表す.

Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_B$ を生成するヒルベルト C*-双加群 X を構成し, KMS state を求める. $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ とする. $A = C(\Sigma)$ とする. $\mathcal{C} = \{(i,j) | B(i,j) = 1\}$ とする. $X = C(\Sigma)$ とおく. 次の式で, 内積と双加群構造を定義する.

(1) $(a \cdot f \cdot b)(i,j) = a(i) f(i,j) b(j) \qquad a, b \in A,\ f \in X.$

(2) $(f|g)_A(j) = \sum_{i,B(i,j)=1} \overline{f(i,j)} g(i,j) \qquad f, g \in X.$

ここで $a \cdot f = \phi(a) f$ とする. これで, X はヒルベルト A-A 双加群となる. (i,j) の特性関数を $\chi_{(i,j)}$, i の特性関数を χ_i とかく. $\{\chi_{(i,j)} | B(i,j) = 1\}$ が X_A の有限基底になっていることが, すぐに確かめられる.

$\mathcal{O}_X$ を X によって決まる Pimsner 環とする. これが行列 B によって与えられる Cuntz-Krieger 環と同型であることを示す. $T_i = \sum_{j,B(i,j)=1} \chi_{(i,j)}$ とする. (p,q) がグ

ラフ上にあるとき, $B(p,q)=1$ である.

$$
\begin{aligned}
(T_iT_i^*\xi)(p,q) &= T_i(p,q)(T_i|\xi)_A(q) \\
&= T_i(p,q)\sum_{k,B(k,q)=1}\overline{T_i(k,q)}\xi(k,q) \\
&= T_i(p,q)\sum_{k,B(k,q)=1}\sum_{j,B(i,j)=1}\chi_{(i,j)}(k,q)\xi(k,q) \\
&= T_i(p,q)B(i,q)\xi(i,q) \\
&= \sum_{j,B(i,j)=1}\chi_{(i,j)}(p,q)B(i,q)\xi(i,q) \\
&= \delta_{i,p}B(p,q)\xi(i,q) \\
&= \delta_{i,p}\xi(p,q) \\
&= (\phi(\chi_i)\xi)(p,q)
\end{aligned}
$$

より, 有限生成であることも用いて, $T_iT_i^*=\chi_i$ である.

$$
\begin{aligned}
T_i^*T_{i'} &= (\sum_{j,B(i,j)=1}\chi_{(i,j)}|\sum_{j',B(i',j')=1}\chi_{(i',j')})_A = 0 \\
T_i^*T_i &= (\sum_{j,B(i,j)=1}\chi_{(i,j)}|\sum_{j',B(i,j')=1}\chi_{(i,j')})_A \\
&= \sum_{j,B(i,j)=1}(\chi_{(i,j)}|\chi_{(i,j)})_A = \sum_j B(i,j)\chi_j = \sum_j B(i,j)T_jT_j^*
\end{aligned}
$$

これより, $\{T_i\}$ は B に関して Cuntz-Krieger 関係を満たす. また, $\{T_i\}$ が A を, したがって X を生成することより, $\mathcal{O}_X$ 全体を生成する. すなわち, $\mathcal{O}_X$ は, Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_B$ と同型である.

$\mathcal{O}_X$ の β-KMS state は, $A=\mathbb{C}^n$ 上の測度 $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ で与えられる. A 上の変換 F は,

$$
\begin{aligned}
F(\chi_i) &= \sum_{j',B(i',j')=1}(\chi_{(i',j')}|\chi_i\chi_{i',j'})_A \\
&= \sum_{j',B(i,j'')=1}(\chi_{(i,j')}|\chi_{i,j'})_A \\
&= \sum_j B(i,j')\chi_{j'}
\end{aligned}
$$

で与えられる. $a=(a_1,\ldots,a_n)$, $\mu=(\psi_1,\ldots,\psi_n)$ とする. ψ は, 双対基底について表

示している．F^* は F の双対変換であり，

$$\begin{aligned}(F^*\psi)(a) &= \psi(F(a)) \\ &= \sum_j(\sum_k B(j,k)\psi_k)a_j\end{aligned}$$

となる．したがって，F^* は，$(\psi_k) \to (\sum_k B(j,k)\psi_k)$ なる変換を与える．$F^*\psi = \lambda\psi$ となる λ は，B のペロンフロベニウス固有値である．測度は，ペロン・フロベニウス固有ベクトル．$F_\beta = e^{-\beta}F^*$ とすると，F_β の不動点である．B が既約としているので，KMS state は一意的になる．

2.4.2 Cuntz 環

N 個の等距離作用素 $\{S_i\}_{i=1,\dots,n}$ で，

$$S_i^*S_j = \delta_{i,j}I, \qquad \sum_{i=1}^N S_iS_i^* = I$$

を満たすもので生成される C*-環が N 生成元の Cuntz-環 $\mathcal{O}_N$ で，Cuntz-Krieger 環の特別な例である．Cuntz 環の場合は，ヒルベルト双加群をフルシフト空間を使っても実現できる．

$$\Sigma = \{(i_1, i_2, \cdots,)|1 \le i_p \le N\}$$

なる無限直積 (カントール空間) を考える．$A = C(\Sigma)$ とする．$\sigma((i_1, i_2, \cdots)) = (i_2, i_3, \cdots)$ が，Σ におけるシフトを定義する．$\mathcal{C} = \{(\omega, \sigma(\omega))|\omega \in \Sigma\}$ とおく．$X = C(\Sigma)$ とする．左右の作用と内積を次で定義する．

$$\begin{aligned}(a\cdot f\cdot b)(\omega,\sigma(\omega)) &= a(\omega)f(\omega,\sigma(\omega))b(\sigma(\omega)) \\ (f|g)(\omega) &= \sum_{\omega'\in\sigma^{-1}(\omega)} \overline{f(\omega,\sigma(\omega))}g(\omega,\sigma(\omega))\end{aligned}$$

$[\omega]_1$ を ω の最初の文字とする．S_i を $\{(\omega,\sigma(\omega))|[\omega]_1 = i\}$ の特性関数とする．このとき，$S_i^*S_j = \delta_{i,j}1$ となること，また $\sum_{i=1}^N S_iS_i^* = 1$ となることがわかる．$\{S_i\}_i$ は Cuntz 環の生成元で ある．また，$S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_m}S_{i_m}^*\cdots S_2^*S_1^*$ はこの双加群では A の元を与え，最初の m パスまでが $(i_1, \cdots, i_m)$ であるようなシリンダー集合の特性関数になる．したがって，$\{S_i\}_{i=1}^N$ は A を生成する．また，$\{S_ia|i = 1,\cdots n, a \in A\}$ は，X を

生成することがわかる．したがって，$\mathcal{O}_X$ は n 生成元の Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ である．この場合，ペロン・フロベニウス作用素 F は

$$F(a)(\omega) = \sum_{\omega' \in \sigma^{-1}(\omega)} a(\omega')$$

で与えられる．$F^*(\mu) = \lambda\mu$ となるような Σ 上の確率測度は積測度 (Huchinson 測度) であり，$\lambda = N$ である．これが，Olsen-Pedersen ([12]) の古典的な結果を示す．

Cuntz 環は典型的な分岐点を持たない N-被覆の表現と考えられる．複素力学系から作られる環はフォンノイマン環で考えると全て Cuntz 環と同様であることがわかり，C* 環で考えることにより，分岐点などの情報を表現することができる．

3 有理関数力学系と Pimsner 環

3.1 有理関数力学系の基本性質

R を 1 変数の 2 次以上の有理関数とし，$N = \deg R$ とする．有理関数 R は，$\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ の N 重の分岐被覆を与えている．

$(R^n)_{n=1,2,\ldots}$ は R の iteration であり，$\hat{\mathbb{C}}$ 上の (非可逆な) 力学系を与える．R に対して F_R でファトウ集合を，J_R でジュリア集合を表す．どちらも R に関する完全不変集合である．

z_0 が R の分岐点であるとは，その回りで R が局所同相にならないような点のことである．そのとき $R'(z_0) = 0$ であるか，z_0 が 2 位以上の極である．分岐点 z_0 の像 w_0 は分岐値と呼ばれる．任意の z_0 に対して z_0 の適当な局所座標系をとって，z_0 の近くで，$R(z) = w_0 + c(z - z_0)^n + \cdots \quad (c \neq 0)$，$n \geq 1$ とかけるとき，n を $e(z_0)$ とかき，R の z_0 における分岐指数という．z_0 が分岐点であることは，$e(z_0) \geq 2$ と同値である．$B(R)$ を R の分岐点全体の集合，$C(R)$ を R の分岐値全体の集合とする．

ある点 z_0 の逆軌道とは，$\{ R^{-n}(z_0) \,|\, n = 0, 1, 2, \cdots \}$ のことであり，$O^-(z_0)$ とかく．逆軌道が有限であるような z_0 を R に対する例外点と言い，例外点の集合を E_R とかく．例外点は Fatou 集合に属する．有理関数は高々 2 個の例外点を持つ．例外点については，次の分類が成り立つ．また，同値関係 $z \simeq_R w$ を非負整数 m, n が存在して $R^m(z)) = R^n(w)$ が成り立つことと定義し，z の同値類を $[z]_R$ とかく．$O^-(z_0) \subset [z]_R$ である．

Lemma 4. *(Beardon Section 4.1)* R の例外点については，次のどれかがなりたつ．

1. $E_R = \phi$.

2. E_R は一点 z_0 からなる. $[z_0]_R = \{z_0\}$ となる. メビウス変換で $z_0 = \infty$ とすることが可能で, そのときは R は多項式である.

3. E_R は2点 z_0, z_1 からなる. $[z_0]_R = \{z_0\}$, $[z_1]_R = \{z_1\}$ となる. $z_0 = 0$, $z_1 = \infty$ $R(z) = z^d$ (d は正の整数) と変換することができる.

4. E_R は2点 z_0, z_1 からなる. $[z_0]_R = [z_1]_R = \{z_0, z_1\}$ となる. $z_0 = 0$, $z_1 = \infty$, $R(z) = z^{-d}$ (d は正の整数) と変換することができる.

有理関数力学系に対して, 以下のようにヒルベルト双加群を定義する. C* 環 A を $A = C(\hat{\mathbb{C}})$ で定義する. $\mathcal{C}_R = \{(z, R(z)) | z \in \hat{\mathbb{C}}\}$ は, R のグラフである. $X_R = C(\mathcal{C}_R)$ は,

$$(a \cdot \xi \cdot b)(x, y) = a(x)\xi(x, y)b(y), \qquad a, b \in A, \xi \in X$$

で A-A 双加群の構造を持つ. また,

$$(\xi|\eta)_A(y) = \sum_{x \in R^{-1}(y)} e(x)\overline{\xi(x, y)}\eta(x, y), \qquad \xi, \eta \in X, y \in \hat{\mathbb{C}}$$

で X_R に A 値内積が定まる. $e(x)$ をかけているために, この内積は y の連続関数になる.

Proposition 5. (X, A) が有理関数 R によって決まる $\hat{\mathbb{C}}$ 上の力学系から作られたヒルベルト C^*-双加群であるとき, $I_X = C(\hat{\mathbb{C}} \backslash B(R))$ である.

ジュリア集合 J_R が完全不変であることにより, R のグラフを J_R に制限して $C(J_R)$ 上のヒルベルト双加群 $X(J_R)$ を考えることもできる. 具体的には, $A_{J_R} = \mathrm{C}(J_R)$, $\mathcal{C}_{J_R} = \{(z, R(z) | z \in J_R)\}$, $X_{J_R} = \mathrm{C}(\mathcal{C}_{J_R})$ とする. X_R と同じ式で A_{J_R}-A_{J_R} 双加群と考えることができる.

Proposition 6. X_R はヒルベルト A-A 双加群となる. また, X_{J_R} もヒルベルト A_{J_R}-A_{J_R} 双加群となる.

Definition 7. X_R から作られる Pimsner 環を $\mathcal{O}_R$ と, X_{J_R} から作られる Pimsner 環を $\mathcal{O}_{J_R}$ とそれぞれ表す.

4 有理関数力学系の KMS state の分類

4.1 基底の構成とペロンフロベニウス作用素の記述

$\mathcal{O}_X$ の β-KMS state を A 上のトレースに帰着させる命題 (Proposition 1) は, Perron-Frobenius 型作用素が可算基底の言葉で述べられていてわかりにくい. そこで, 有理

関数力学系から決まるヒルベルト A 加群 X_R に対して, 具体的に可算基底を書き下し, それを用いて Perron-Frobenius 型作用素の形を記述することを試みる. なお, 分岐被覆に対して具体的に可算基底を構成した例は現在のところ他にはない.

最初に, $R(z) = z^n$ の場合を考える. $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$, $A = C(D)$, $\mathcal{C} = \{(z, z^n) | |z| \leq 1\}$, $X = C(\mathcal{C})$ とし, X を A 加群と考える.

$[0, \infty)$ 上の連続関数 $r_i(x)$ を次のように定義する.

$$r_i(x) = \begin{cases} 1 & \frac{L}{i} \leq x \\ \frac{i}{L}x & \frac{M}{2i} \leq x \leq \frac{L}{i} \\ 0 & 0 \leq x \leq \frac{L}{2i}. \end{cases}$$

ここで, L を正の定数とする. さらに, $r_0(x) = 0$ とおく. $r_i(x) \leq r_{i+1}(x)$ であることに注意して,

$$v_i(x) = (r_i(x) - r_{i-1}(x))^{1/2}.$$

とおく. また, $1 \leq p \leq n-1$ に対して, $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ 上の関数 $\xi_p(z)$ を

$$\xi_p(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{z}{|z|} \right)^p$$

によって定義する.

これらを用いて, $1 \leq i$, $1 \leq p \leq n-1$ に対して,

$$u_{1+(n-1)(i-1)+p}(z, z^n) = \xi_p(z) v_i(|z|),$$

とおく. これらの関数は, $\mathcal{C}$ 上の連続関数に拡張できる.

Proposition 8. 上で作った $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ は, X の可算基底となる.

証明においては, 1 の原始 n 乗根の性質がポイントである.

次に, $z \in B(R)$, $w = R(z) \in C(R)$ とする. a, b の両方に対してに座標閉近傍 U, $R(U)$ をとって $w = z^n$ と表す. $\mathcal{C} = \{(z, R(z)) | z \in U\}$ から作ったヒルベルト加群の基底の構成は, $R(z) = z^n$ の場合と同様に行うことができる. $\hat{\mathbb{C}}$ 全体を, 局所的に近傍をとって覆い, そこで上記の基底を作り, さらにそれらを張り合わせて, 全体の基底を作ることができる.

ここまで構成した基底を用いて, Perron-Frobenius 型作用素の具体的な形を求める. $a \in A = C(\hat{\mathbb{C}})$ に対して, ボレル関数 $\tilde{a}$ を次のように定義する.

$$\tilde{a}(w) = \sum_{w \in R^{-1}(w)} a(z)$$

Proposition 9. X_R において, 上で作った可算基底を $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ とする. そのとき, $a \in A$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k|au_k)_A(y) = \tilde{a}(y)$$

がなりたつ.

Proof. 証明は, $R(z) = z^n$ の場合にまず行い, 基底の構成の場合と同じ手法によって, 一般的な場合に拡張する. □

以下, 測度 μ と μ による積分によって定まる A 上の線形汎関数を同一視し, μ による関数 a の積分を $\mu(a)$ と書く. これを用いると, (K1), (K2) は有理関数力学系の状況では次のように書ける.

$$(K3) \qquad \mu(\tilde{a}) = e^{\beta}\mu(a) \qquad a \in C(\hat{\mathbb{C}} \backslash B(R))$$
$$(K4) \qquad \mu(\tilde{a}) \leq e^{\beta}\mu(a) \qquad a \in C(\hat{\mathbb{C}})^{+}$$

4.2 分類

前節までの結果を用いて, 以下 $\mathcal{O}_R$ の β-KMS state の分類を行う.

μ が $\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル測度とするとき, $z \in \hat{\mathbb{C}}$ の点密度について, 次の補題が得られる.

Lemma 10. $\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル測度 μ がある β に対して *(K3), (K4)* をみたすとき, μ の点密度は次の式をみたす.

$$(K3)' \qquad e^{-\beta}\mu(\{R(w)\}) = \mu(\{w\}), \qquad w \ni B(R)$$
$$(K4)' \qquad e^{-\beta}\mu(\{R(w)\}) \leq \mu(\{w\}), \qquad w \in \hat{\mathbb{C}}$$

次の命題は, KMS state の分類において本質的である.

Proposition 11. μ が ある β に対して *(K3), (K4)* をみたすとする. もし μ が例外点以外の点で点密度を持てば, $\beta > \log N$ でなければならない.

$\beta > \log N$ とする. $A/I_X \simeq C(B(R))$ であるので, A/I_X の tracial state は $B(R)$ の点で与えられる. $w \in B(R)$ に対して,

$$\mu_{\beta,w} = m_{\mu_{\beta,w}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\beta} \sum_{z \in R^{-k}(w)} \delta_z$$

とおく. $m_{\mu_{\beta,w}}$ は正規化定数である. この場合は $\|F_\beta\| < 1$ であり, 右辺の級数は絶対収束する. 対応する $\mathcal{O}_R$ の β-KMS state を $\varphi_{\beta,w}$ とかく. このときの β-KMS state は $\{ \varphi_{\beta,w} | w \in B(R)\}$ でつきる.

次に, $\beta = \log N$ の場合に Lyubich 測度が β-KMS state を与えることを示す.

Definition 12. (Lyubich [10]) $y \in \hat{\mathbb{C}} \backslash E(R)$ と n に対して,

$$\mu_n^y = \sum_{x \in R^{-n}} N^{-n} e(x) e(R(x)) \cdots e(R^{n-1}(x)) \delta_x$$

とおく. そのとき $(\mu_n^y)_n$ はある測度 μ_L に弱収束する. μ_L は Lyubich 測度とよばれ, y の取り方にはよらない. また, μ_L は Julia 集合にサポートを持つ.

$G : C(\hat{\mathbb{C}}) \to C(\hat{\mathbb{C}})$ を,

$$G(f)(w) = \sum_{z \in R^{-1}(w)} e(z) f(z)$$

とおく. G^* は Perron-Frobenius 型作用素 F と一致しないが, μ が点密度を持たないならば, $G^*(\mu) = F(\mu)$ である. 特に, Lyubich measure は点密度を持たない. Lyubich 測度は,

$$G^*(\mu_n^x) = N \sum_{y \in R^{-1}(x)} \mu_{n+1}^y$$

であることより, $G^*(\mu^L) = N\mu^L$ となる. 従って, $F(\mu^L) = N\mu^L$ がなりたつ.

Proposition 13. *Lyubich 測度 μ^L は $\mathcal{O}_R$ の $\log N$-KMS state に拡張できる.*

次は, KMS state の最終的な分類にも使われる命題である.

Proposition 14. *ボレル確率測度 μ は次のいずれかをみたすとする.*

1. *μ はある β に対して (K3) と (K4) をみたし, $B(R)$ で点密度をもたない.*
2. *μ はある β に対して (K3) をみたし, $B(R) \cup C(R)$ で点度をもたない.*

そのとき, 次のことがわかる. $\beta \neq \log N$ なら $\mu = 0$ である. $\beta = \log N$ なら, μ は Lyubich 測度に一致しなければならない.

μ が (K3), (K4) をみたして $B(R)$ で点密度を持たなければ, $C(R)$ でも点密度を持たない. 両方の場合に (K3) の等式が全ての $a \in \mathrm{C}(\hat{\mathbb{C}})$ でなりたつことが示される. 最後の文は, 有理関数力学系のエルゴード的性質を表している.

例外点を持たない場合には, 以上で KMS state の分類は終わる. 最後に, 例外点を持つ場合を考える.

Proposition 15. *例外点がふたつ w_1, w_2 でともに R に固定されるとする. そのとき, $\mu_{\beta,w_1} = \delta_{w_1}$, $\mu_{\beta,w_2} = \delta_{w_2}$ は 任意の $\beta \geq 0$ に対して $\mathcal{O}_R$ の β-KMS state φ_{β,w_1}, φ_{β,w_2} に拡張できる. $\beta = 0$ のときは, γ-不変な tracial state である.*

Proposition 16. 例外点がふたつ w_1, w_2 で R によって入れ換わるとする．そのとき，

$$\mu_{\beta,1}=\frac{1}{e^{\beta}+1}\delta_{w_1}+\frac{e^{\beta}}{e^{\beta}+1}\delta_{w_2} \qquad \mu_{\beta,2}=\frac{e^{\beta}}{e^{\beta}+1}\delta_{w_1}+\frac{1}{e^{\beta}+1}\delta_{w_2}$$

とすると，これらを拡張した $\mathcal{O}_R$ の β-*KMS state* $\varphi_{\beta,1}$ および $\varphi_{\beta,2}$ が 例外点に対応する β-*KMS state* の端点である．ただし，$\beta=0$ のときには γ 不変 *tracial state* でとなり，一点に退化する．

Proposition 17. 例外点が一つ w_1 とする．μ^{β,w_1} は β-*KMS state* に拡張される．

$0\le\beta<\log N$ のときの分類定理の証明の最後は次のように行われる．例えば例外点に関して2番目の場合としよう．μ が $\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル確率測度である β に対して (K3),(K4) をみたしているとする．$\nu=\mu-\mu\{z_1\}\delta_{z_1}-\mu\{z_2\}\delta_{z_2}$ とおく．そのとき正値ボレル測度 ν は同じ β に対して (K3) をみたす．(K4) をみたしている保証はない．しかしながら，ν は $B(R)\cup C(R)$ で点密度を持たないので，Proposition 14 により $\beta\neq\log N$ なら $\nu=0$ であり，$\beta=\log N$ なら ν は φ^L の正定数倍である．他の場合も同様である．

Theorem 18. 有理関数 R によって与えられる複素力学系に付随した C^*- 環のゲージ作用による β-*KMS-state* の端点は，次のように分類できる．

1. 例外点がない場合．$\beta=\log N$ のときは，*Lyubich* 測度によって決まる *KMS state* φ^L に限る．$\beta>\log N$ のときは，$\{\varphi_{\beta,z}|z\in B(h)\}$ である．$0\le\beta<\log N$ のときは存在しない．

2. 例外点が1個で z の場合，$0\le\beta<\log N$ のときは，例外点に対応する *KMS-state* $\varphi_{\beta,z}$ が1つのみある．$\beta=\log N$ のときは，φ^L と $\varphi_{\beta,z}$ が両方存在する．$\beta>\log N$ のときは，$\{\varphi_{\beta,z}|z\in B(h)\}$ である．

3. 例外点が2つで z_1 z_2 であり独立している場合．$0\le\beta<\log N$ のときは，φ_{β,z_1} と φ_{β,z_2} が端点である．$\beta=\log N$ のときは，φ^L, φ_{β,z_1}, φ_{β,z_2} が端点である．$\beta>\log N$ のときは，φ_{β,z_1} と φ_{β,z_2} が端点である．

4. 例外点が2つで互いに移りあうとき．$0\le\beta<\log N$ のときは $\varphi_{\beta,1}$ と $\varphi_{\beta,2}$ が端点で，$\beta=\log N$ のときは，φ^L および $\varphi_{\beta,1}$, $\varphi_{\beta,2}$ であり，$\beta>\log N$ のときは，$\varphi_{\beta,1}$, $\varphi_{\beta,2}$ である．

これらをみると，KMS state の情報から，有理関数の次数 (被覆次元)，分岐点の数，例外点のパターンが復元されることができる．

ジュリア集合に制限して作った $\mathcal{O}_R(J_R)$ に対しては，次の定理がなりたつ．なお，この C*-環は，単純でかつ純無限である．

Theorem 19. $\mathcal{O}_R(J_R)$ のゲージ作用に関する *β-KMS state* について, 次が成り立つ.

1. $0 \leq \beta < \log N$ に対して, *β-KMS state* は存在しない.

2. $\beta = \log N$ のとき, 一意的な *KMS state* φ^L が存在する. $\varphi^L|_{C(J_R)}$ は *Lyubich* 測度である.

3. $\log N < \beta$ に対して, *β-KMS state* の端点は, $B(R)$ でパラメトライズでる.

Corporally 20. J_R が分岐点を含まないとき, $\mathcal{O}_{J_R}$ のゲージ作用に関する *β-KMS state* は $\beta = \log N$ のときにのみ存在し, *Lyubich* 測度によって与えられる.

4.3 フォンノイマン環の型

φ が $\mathcal{O}_R$ の β-KMS state とする. φ から C*-環 $\mathcal{O}_R$ の GNS 表現 φ_π を構成することができる. KMS state が端点であるときに GNS 表現が生成するフォンノイマン環は因子環であり, その型を調べることは重要な問題である. これは, C*-環を考えることが位相的な考察にあたるのに対して, 測度論的な考察にあたる.

Theorem 21. *extreme KMS state* について次がなりたつ.

1. φ^L による *GNS* 表現が生成するフォンノイマン環は, $III_{e^{-\beta}}$ 型因子環である.

2. φ^L 以外の *extreme KMS state* の *GNS* 表現が生成するフォンノイマン環は, *I* 型因子環である.

1 番目は, 有理関数力学系は, *Lyubich* 測度についての測度零集合を取り去ると, フルシフトと同型になってしまい, 生成するフォンノイマン環が全く同型になることから示される *(Heicklen and Hoffman [5])*.

これは, 測度論的に考えると有理関数力学系はすべてフルシフトと同じになることを示し, 少なくとも位相的に考えることの重要性を示している.

5 補足

5.1 自己相似写像

コンパクト位相空間上の自己相似写像に対しても, ヒルベルト C*-双加群を作り, Pimsner 環を構成して KMS state を分類することができる. どちらでも取り扱える例もあるが, 自己相似写と考える方がわかりやすいことが多い.

(Ω, d) をコンパクト距離空間とする. $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ は proper contractions 系, すなわち,

$$c_1 d(x,y) \le d(\gamma_i(x), \gamma_i(y)) \le c_2 d(x,y), \ i = 1, \ldots, N, \quad \forall x, y \in K$$

となるような $0 < c_i < 1$ がとれるものとする. コンパクト部分集合 K が γ に関して自己相似であるとは,

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} \gamma_i(K)$$

となることである. γ の性質により, このような K は唯一つ存在する. 有理関数力学系の場合と同様に, 特異点を表す次の集合を定義する.

$$B(\gamma) = \{ x \in K | x = \gamma_j(y) = \gamma_{j'}(y) \quad \text{for some } y \in K \text{ and } j \neq j' \}$$
$$C(\gamma) = \{ y \in K | \gamma_j(y) = \gamma_{j'}(y) \text{ for some } j \neq j' \}$$

γ_i たちの cograph の和集合として γ の「グラフ」を定義する.

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{N} \{ (x,y) \in K^2 \,|\, x = \gamma_i(y) \}$$

$A = C(K)$, $X = C(\mathcal{G})$ とおく. A-A 双加群構造と A 内積を次のように定義する.

$$(a \cdot f \cdot b)(x,y) = a(x) f(x,y) b(y), \qquad a, b \in A, \ f \in X \qquad x, y \in K$$
$$(\xi|\eta)_A(y) = \sum_{i=1}^{N} \overline{\xi(\gamma_i(y), y)} \eta(\gamma_i(y), y), \qquad \xi, \eta \in X, \quad y \in K$$

この演算で, X は ヒルベルト A-A 双加群となる. これから作られる Pimsner 環を, $\mathcal{O}_\gamma$ とかく. 自己相似写像の場合においても, $I_X = C_0(K \backslash B(R))$ となる.

自己相似写像の場合には, Lyubich 測度の代わりになるものは Huchinson 測度である. $\overline{G} : C(K) \to C(K)$ を,

$$\overline{G}(a) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a \circ \gamma_i, \qquad a \in C(K)$$

とおく. Huchinson 測度 μ^H とは, K 上の G^* 不変な確率測度であり, 一意的に存在する. Huchinson 測度も点密度を持たない. Huchinson 測度は $\mathcal{O}_\gamma$ の $\log N$-KMS state φ^H に拡張される.

Theorem 22. γ をコンパクト距離空間上の *proper contraction* の系で $K=\cup_{i=1}^{N}\gamma_i(K)$ をみたすものとする. $B(\gamma)=\phi$ か $B(\gamma)$ が有限集合で任意の $y\in C(\gamma)$ に対して $O(x)\cap C(\gamma)=\phi$ となるような $x\in O(y)$ が存在すると仮定する. ゲージ作用に関する $\mathcal{O}_\gamma(K)$ の *β-KMS state* について次が存在する.

1. $0\le\beta<\log N$ に対して *β-KMS state* は存在しない.

2. $\beta=\log N$ のときには, *Huchinson* 測度を拡大した *KMS state* φ^H のみ存在する.

3. $\log N<\beta$ のときは *β-KMS state* の端点は, $B(\gamma)$ の点によってパラメトライズされる.

φ^H の GNS 表現によって生成されるフォンノイマン環は複素力学系の場合と同様に, $III_{1/N}$ 型因子環である.

Example 5.1. (テント写像の逆分枝) $K=[0,1]$, $\gamma_1(y)=(1/2)y$, $\gamma_2(y)=1-(1/2)y$. とする. このとき, $B(\gamma)=\{1/2\}$, $C(\gamma)=\{1\}$ である. $O(1/2)\cap C(\gamma)=\phi$ で定理の仮定は満たされている.

$0\le\beta<\log 2$ のときは β-KMS state はない. $\beta=\log 2$ のときは, 一意的な KMS state φ^H が存在する. $\varphi^H|_{C([0,1])}$ は正規化されたルベーグ測度である. $\log 2<\beta$ のときは,

$$\mu_{\beta,1/2}=(1-2e^{-\beta})\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\beta}\sum_{\{j_1,\cdots,j_n\}\in\{1,2\}^n}\delta_{\gamma_j\cdots\gamma_{j_n}(1/2)}$$

を拡大した $\log\beta$-KMS state がただひとつ存在する.

Example 5.2. (Sierpinski gasket) Ω を $\mathbf{R}^2$ の 3 頂点が $c_1=(1/2,\sqrt{3}/2)$, $c_2=(0,0)$, $c_3=(1,0)$ となる正三角形とする. c_1c_2 の中点が b_1, c_1c_3 の中点が b_2, c_2c_3 の中点が b_3 とする. proper contraction の系 $\tilde{\gamma}_i$ $(i=1,2,3)$ を

$$\tilde{\gamma}_1(x,y)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4},\frac{y}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\quad \tilde{\gamma}_2(x,y)=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right),\quad \tilde{\gamma}_3(x,y)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2},\frac{y}{2}\right).$$

で定義する. また α_θ を角度 θ の回転とする. $\gamma_1=\tilde{\gamma}_1$, $\gamma_2=\alpha_{-2\pi/3}\circ\tilde{\gamma}_2$, $\gamma_3=\alpha_{2\pi/3}\circ\tilde{\gamma}_3$ とおく. S で, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ によって決まる自己相似集合を表す. このとき, $B(\gamma)=\{b_1,b_2,b_3\}$ かつ $C(\gamma)=\{c_1,c_2,c_3\}$, である.

この例の S は, Sierpinski gasket とよばれるフラクタル集合であるが, 自己相似写像の作り方が通常のものと変わっていて, 分岐点が生じる. $\beta>\log 3$ として,

$$\mu_{\beta,b_k}=(1-3e^{-\beta})\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta n}\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\{1,2,3\}}\delta_{\gamma_{j_1}\cdots\gamma_{j_n}(b_k)}$$

とおく. $\varphi_{\{b_k\}}$ は μ_{β,b_k} を拡張した KMS state とする.

Proposition 23. $\mathcal{O}_\gamma$ のゲージ作用に関する *β-KMS state* は次のようになる.

1. $\beta < \log 3$ のときは, *KMS state* は存在しない.

2. $\beta = \log 3$ のときには, φ^H のみであり, 無限型である.

3. $\beta > \log 3$ のときは, $\{\varphi_{\beta,b_k} | k = 1, 2, 3\}$ が *KMS state* の端点である.

なお, テント写像, 上の Sierpinski gasket 力学系は, それぞれ $h(z) = 2z^2 - 1$, $h(z) = \frac{z^3 - \frac{16}{27}}{z}$ によって決まる複素力学系をジュリア集合に制限したものとしても実現できる (Ushiki [14]).

5.2 未解決問題

(1) 分岐点の個数は復元できるが, かなり重要な情報である分岐指数は復元できていない. 例えば, $R(z) = z^2$ と $R(z) = z^3$ の違いは, KMS state からは分からない.

(2) 分岐点をつなぐ幾何学的な情報も, 復元することができない.

なお, これには $\mathcal{O}_X$ においてここで考えた Hilbert C*-双加群が C* 環に対して標準的なものではなく, $\mathcal{O}_X$ を生成する Hilbert C*-双加群の取り方はいくらでもあることにもよる.

(3) 複素力学系に対して Pimsner 環を構成して研究すると, 複素力学系の位相的な性質, エルゴード的な性質はつかまるが, 微分幾何的な性質, 解析的な性質はつかまらない. 別の枠組が必要である.

参考文献

[1] Beardon A.F. *Iteration of rational functions* GTM 132, 1991, Springer New York

[2] Exel R., *Crossed-products by finite index endomorphisms and KMS states,* J. Funct. Anal. 199(2003), 153–183

[3] Enomoto M., Fujii M. and Watatani Y., *KMS states for gauge action on* O_A, Math. Japon. 29(1984), 607–619

[4] Exel R. and Laca M., *Partial dynamical systems and the KMS condition,* Commun. Math. Phys., 232(2003), 223–277

[5] Heicklen D. and Hoffman C., *Rational maps are d-adic Bernuilli,* Annals of Math., 156(2002), 103-114

[6] Izumi M., Kajiwara T. and Watatani Y. *KMS states and Branched points,* [arXiv : math.OA/0603592]

[7] Kajiwara T. and Watatani Y., *C^*-algebras associated with complex dynamical systems,* Indiana Univ. Math. J. 54 No. 3 (2005),755-77

[8] Kajiwara T. and Watatani Y., *C^*-algebras associated with self-similar sets* to appear in J. Operator Theory

[9] Kajiwara T. and Watatani Y., *KMS states on C^*-algebras associated with self-similar sets,* [arXiv : math.OA/0405514]

[10] Lyubich M. Y., *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere,* Ergodic Th. & Dynam. Sys. **3** (1983), 351-385.

[11] Laca M. and Neshveyev S., *KMS states of quasi-free dynamics on Pimsner algebras,* J. Funct. Anal. 211(2004) 457–482

[12] Olsen D. and Pederson G.K., *Some C^*-dynamical systems with a single KMS state,* Math. Scand. 42(1978), 111–118

[13] Pinzari C., Watatani Y. and Yonetani K. *KMS states, entropy and the variational principle in full C^* -dynamical systems,* Commun. Math. Phys. 213(2000), 331–379

[14] Ushiki S., *Julia sets with polyhedral symmetries* Proceedings of the International Conference "Dynamical Systems and Related Topics", Ed. K.Shiraiwa, Advanced Series in Dynamical Systems Vol 9. pp515-538. World Scientific, 1991.